

Das Zwillingsparadoxon – einmal genau betrachtet

Bei der mathematischen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons – das in Wirklichkeit keines ist – werden im Allgemeinen die Beschleunigungs- und Bremsphasen zu Beginn, bei der Umkehr und am Ende der Reise vernachlässigt. Dabei sind – wie sich zeigen wird – gerade sie die Ursachen des gesamten Phänomens. Und nur dadurch, dass sie berücksichtigt und genauer untersucht werden, lässt sich der Vorgang befriedigend erklären und das Paradoxon auflösen.

Betrachten wir die Sache also einmal etwas genauer. Dabei genügt es, nur die Hinreise zu untersuchen, da die Rückreise als ihr Spiegelbild betrachtet werden kann. Bekanntlich entsteht das (scheinbare) Paradoxon erst dann, wenn man den Vorgang auch aus der Sicht des reisenden Zwillings betrachtet, der angeblich aus Symmetriegründen mit Recht behaupten könne, der daheim gebliebene Bruder wäre weniger gealtert. Daher muss – wenn man die Kritiker Einsteins überzeugen und seinen Anhängern stichhaltige Argumente liefern will – das Geschehen aus beiden Perspektiven betrachtet werden.

1 Allgemeine Überlegungen

Gegeben seien zwei zunächst relativ zueinander ruhende Bezugssysteme S und S' , welche durch eine X -Achse bzw. eine X' -Achse repräsentiert werden. Die beiden Achsen liegen aufeinander, ihre Ursprünge (Nullpunkte) O und O' koinzidieren und die Uhren in beiden Systemen sind synchronisiert. Dann wird S' beschleunigt usw. Fortan sind die beiden Brüder unterschiedlicher Auffassung darüber, ob zwei Ereignisse, die an *verschiedenen* Orten auftreten, gleichzeitig sind oder nicht. (Diese unterschiedliche Auffassung der Gleichzeitigkeit ist die Ursache der relativistischen Effekte „Zeitdilatation“ und „Lorentz-Kontraktion“, die beide nur aus der Sicht des Beobachters im jeweils anderen System existieren.)

Ein Vergleich der Reisezeiten ist erst wieder möglich, wenn entweder die Ursprünge O und O' koinzidieren, oder die beiden Beobachter sich über die Gleichzeitigkeit einig sind, was gleiche Geschwindigkeit voraussetzt (sonst nichts).

Im ersten Fall (Koinzidenz von O und O') ist es gleichgültig, ob die Beobachter noch relativ zu einander bewegt sind oder nicht, weil die Uhren in O und O' sich dann am selben Ort befinden. Jeder Beobachter (B und B') kann seine eigene Uhr mit der im anderen System vergleichen, und es kann keine Meinungsverschiedenheit über das Ergebnis geben. System S' braucht in diesem Fall nicht abgebremst zu werden, es genügt ein »Vorbeiflug« von O' an O .

Im zweiten Fall (keine Relativgeschwindigkeit und daher Einigkeit bezüglich der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an unterschiedlichen Orten) kann der Vergleich der Uhr in O' mit *jeder beliebigen* Uhr in S vorgenommen werden, da alle Uhren in S auch für den Beobachter in S' wieder synchron gehen (wenn sie auch nicht dasselbe anzeigen wie seine eigene Uhr). Dieser zweite Fall tritt im Umkehrpunkt ein. Bereits dort können B' und der ihm gegenüber stehende Beobachter B_1 in S (der natürlich nicht identisch ist mit B , der sich ja in O befindet) ihre Uhren vergleichen. (Das ist der Grund dafür, dass es genügt, lediglich den Hinflug von S' zu betrachten.

Von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t_1$ erfahre das System S' eine konstante Beschleunigung vom Größenwert a (Phase 1). Von t_1 bis t_2 (Phase 2) sei die Geschwindigkeit von S' konstant gleich v_1 , von t_2 an erfahre S' eine negative Beschleunigung vom Größenwert $-a$ (Phase 3), bis es zur Zeit t_3 relativ zu S wieder in Ruhe ist. (Selbstverständlich wird mit zunehmender Geschwindigkeit die zur

konstanten Beschleunigung benötigte Kraft immer größer. Über die damit verbundenen technischen Probleme brauchen wir uns hier keine Sorgen zu machen.)

2 Der Vorgang aus der Sicht eines Beobachters in S

Das Minkowski-Diagramm der Hinreise sieht wie folgt aus, wobei die rote Kurve die »Weltlinie« des Punktes O' ist. Die momentane W' -Achse des Systems S' ist die Tangente im jeweils betrachteten Kurvenpunkt der Weltlinie.

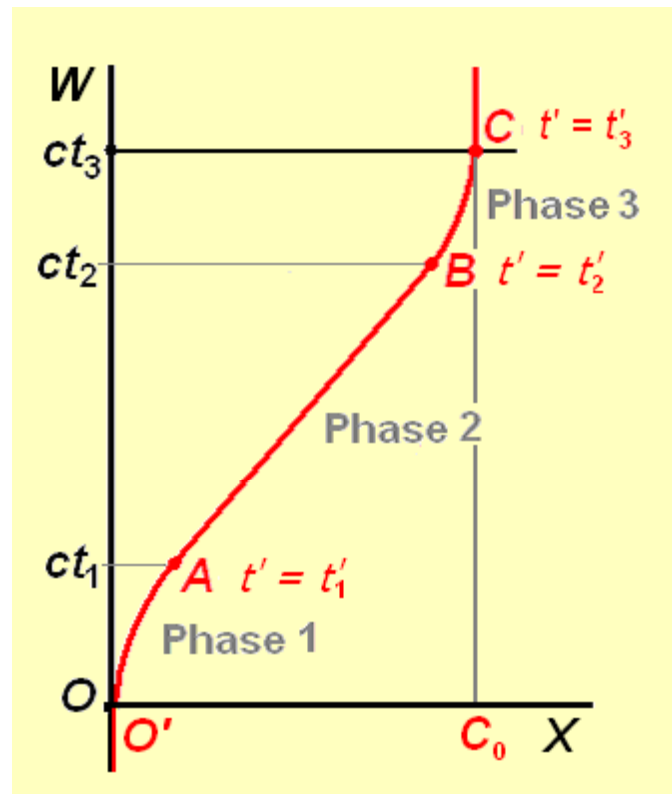


Abb. 1: Weltlinie von O'

Betrachten wir ein kleines Stück der Weltlinie des Punktes O' . Für die Länge der Sekante zwischen zwei Kurvenpunkten gilt wegen der pseudoeuklidischen Metrik

$$(\Delta w')^2 = (\Delta w)^2 - (\Delta x)^2,$$

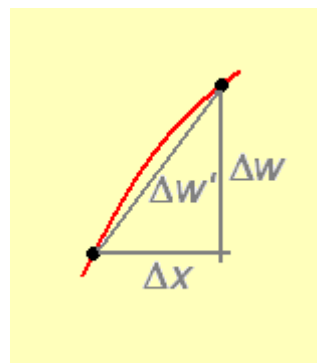


Abb. 2: Sekante der Weltlinie

und für das Differential der Bogenlänge

$$(dw')^2 = (dw)^2 - (dx)^2,$$

woraus mit $w' = ct'$ und $w = ct$ folgt

$$c^2 (dt')^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2$$

und schließlich

$$dt' = \sqrt{(dt)^2 - \frac{(dx)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt.$$

Für die Dauer der drei Phasen im System S' von S aus gesehen ergibt sich daraus:

Phase 1:

$$\begin{aligned} t'_1 &= \int_0^{t_1} dt' = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2}} dt \\ &= \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2a} \arcsin \frac{at_1}{c} \quad \text{und mit } at_1 = v_1 \quad \text{und } a = \frac{v_1}{t_1} \\ t'_1 &= \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2v_1} t_1 \arcsin \frac{v_1}{c} = \frac{t_1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right). \end{aligned}$$

Phase 2:

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} (t_2 - t_1) \\ &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Das entspricht der bekannten relativistischen Zeitdilatation. Für t'_2 folgt daraus

$$\begin{aligned} t'_2 &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + t'_1 \\ &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{t_1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right) \\ &= \left(t_2 - \frac{t_1}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{t_1}{2} \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c}. \end{aligned}$$

Phase 3:

Wegen der Symmetrie der Phasen 1 und 3 gilt

$$t'_3 - t'_2 = t'_1 = \frac{t_1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right).$$

Aus

$$t'_3 = t'_1 + t'_2$$

folgt

$$\begin{aligned} t'_3 &= \frac{t_1}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right) + \left(t_2 - \frac{t_1}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{t_1 c}{2 v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \\ &= t_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + t_1 \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c}. \end{aligned}$$

Dagegen ist

$$t_3 = t_1 + t_2.$$

Die Differenz der Reisezeiten in den beiden Systemen ist somit

$$\Delta T = t_3 - t'_3 = t_1 \left(1 - \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right) + t_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \right).$$

Diskussion:

1. Für $v_1 \ll c$ ist

$$\arcsin \frac{v_1}{c} \approx \frac{v_1}{c} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \approx 1,$$

und daher ΔT verschwindend klein.

2. Für v_1 gegen c wird

$$\Delta T \approx t_1 \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + t_2 = t_2 - 0,57 t_1.$$

Wenn außerdem $t_2 \gg t_1$ ist, wird $\Delta T \approx t_2$.

3. Auch für mittlere Werte von v_1 können die Beschleunigungsphasen 1 und 3 gegenüber der Phase 2 vernachlässigt werden, wenn $t_2 \gg t_1$ ist. Dies ist genau das, was bei der üblichen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons geschieht, wenn die tatsächliche Weltlinie des reisenden Bruders durch eine geknickte Gerade ersetzt wird. Dieses Vorgehen wird also durch das Ergebnis der exakten Rechnung als brauchbare Näherung gerechtfertigt.

Beispiel:

Für die Abb. 3 wurde angenommen $\alpha = \arctan(v/c) = 40^\circ$, woraus folgt $v/c \approx 0,84$. Daraus ergeben sich dann die Dauer der einzelnen Phasen im System S' :

Phase 1: $t'_1 = 0,86 t_1$,

Phase 2: $t'_2 - t'_1 = 0,40 (t_2 - t_1)$,

Phase 3: $t'_3 - t'_2 = t'_1 = 0,86 t_1 = 0,86 (t_3 - t_2)$.

Zeitdifferenz $\Delta T = t'_3 - t_3 = 0,60 t_2 - 0,19 t_1$.

Ergebnis:

Im Umkehrpunkt der Reise zeigt der Uhrenvergleich im Punkt C, dass im System S' weniger Zeit vergangen ist als im System S , worüber zwischen den Beobachtern in S und S' Einvernehmen besteht. Die X - und die X' -Achse (siehe Abbildung 3) fallen wieder zusammen, aber die Uhren in S und S' zeigen unterschiedliche Zeiten an. Es handelt sich dabei also um einen gänzlich anderen Effekt als bei der »relativistischen Zeitdilatation«, die ja symmetrisch in dem Sinne ist, dass jeder Beobachter die Uhren im anderen System langsamer gehen sieht.

Für den Beobachter in S gibt es für diese Erscheinung anscheinend nur eine vernünftige Erklärung: Der Gang der Uhren im System S' werden in der Phase 1 verlangsamt. In der Phase 2 gehen diese Uhren dann mit verminderter, aber konstanter Geschwindigkeit, und in der Phase 3 werden die Uhren wieder auf die ursprüngliche Ganggeschwindigkeit gebracht. Als Ursache dafür käme allein die Beschleunigung bzw. die Verzögerung des Systems S' in Betracht. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass es noch eine andere Erklärung gibt.

3 Der Vorgang aus der Sicht eines Beobachters in S'

Wir berechnen jetzt die Dauer, welche die Phasen 1, 2 und 3 aus der Sicht eines Beobachters im System S' im System S haben.

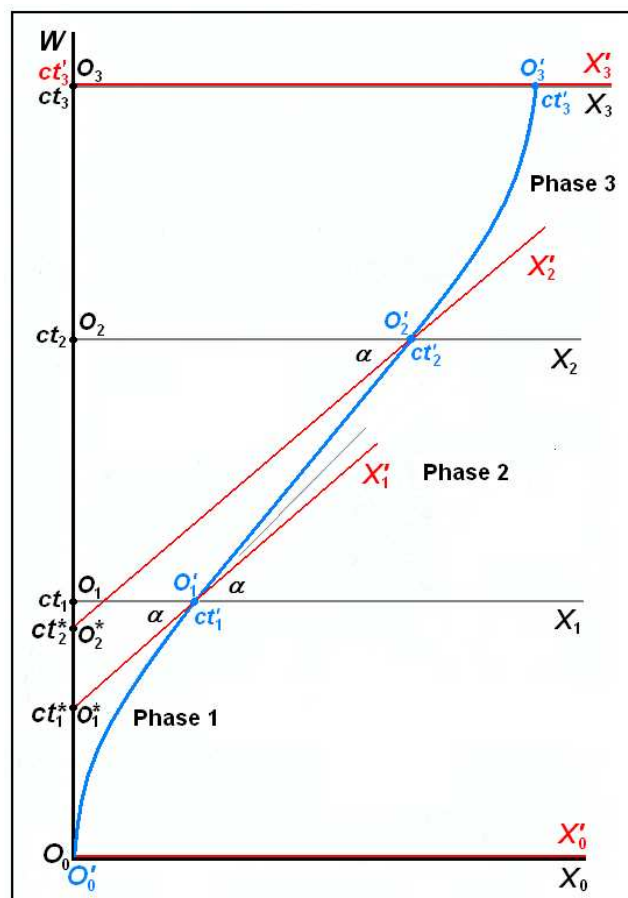


Abb. 3

In Abbildung 3 ist die Lage der X'-Achse des Systems S' zu vier verschiedenen Zeitpunkten eingezeichnet. Ihre Schnittpunkte mit der W-Achse geben die Orte des Punktes O zu den Zeiten t'_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) an, beurteilt vom System S' aus. (In S hat O' dieselbe w-Koordinate wie O, die beiden Punkte sind also in S »gleichzeitig«. In S' dagegen ist der Punkt O^*_1 mit O'_1 gleichzeitig, usw.)

Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt aus Abbildung 3:

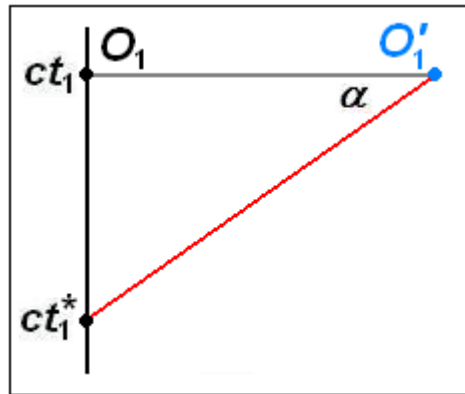


Abb. 4

Es ist

$$\overline{O_1 O'_1} = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{v_1}{2} t_1,$$

und daher

$$ct_1 - ct_1^* = c(t_1 - t_1^*) = \frac{v_1}{2} t_1 \tan \alpha = t_1 \frac{v_1}{2} \frac{v_1}{c}, \quad \left(\tan \alpha = \frac{v_1}{c} \right)$$

$$t_1^* = t_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{c^2} \right) < t_1.$$

Mit den oben angenommenen Werten ist

$$t_1^* = t_1 (1 - \frac{1}{2} 0,84^2) = 0,65 t_1 < t_1.$$

Aus der Sicht des Beobachters in S' ist also die Phase 1 in S kürzer als in S'. Für ihn scheinen also die Uhren in S langsamer zu gehen als die eigenen. Das entspricht der relativistischen Zeitdilatation und beruht, wie man aus Abbildung 3 erkennen kann, auf der Drehung der X'-Achse.

Analog ergibt sich aus Abbildung 5:

$$\overline{O_2 O'_2} = \overline{O_1 O'_1} + v_1 (t_2 - t_1) = \frac{v_1}{2} t_1 + v_1 (t_2 - t_1) = v_1 (t_2 - \frac{1}{2} t_1),$$

$$c(t_2 - t_2^*) = v_1 (t_2 - \frac{1}{2} t_1) \tan \alpha = \frac{v_1^2}{c} (t_2 - \frac{1}{2} t_1),$$

$$t_2^* = t_2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) + \frac{1}{2} t_1 \frac{v_1^2}{c^2},$$

$$t_2^* - t_1^* = t_2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) - t_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) = (t_2 - t_1) \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) = (t'_2 - t'_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}.$$

Auch in Phase 2, in der sich S' mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, tritt der bekannte symmetrische Effekt der relativistischen Zeitdilatation auf. Wieder gehen die Uhren in S für einen Beobachter in S' langsamer als die eigenen Uhren.

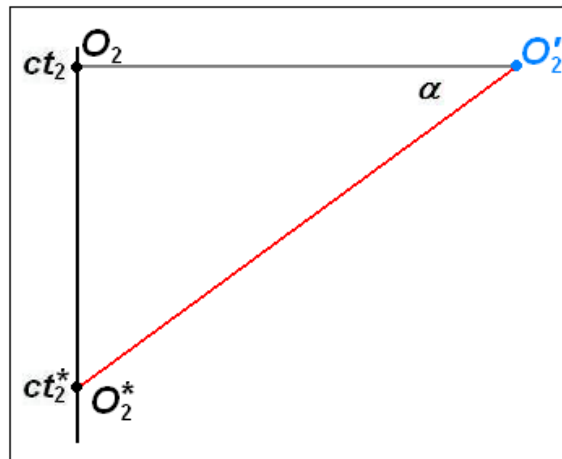


Abb. 5

In Phase 3 vergeht in S' die Zeit $t'_3 - t'_2 = t'_1$, während in S – immer aus der Sicht eines Beobachters in S' – die sehr viel größere Zeitspanne $t_3 - t_2^*$ vergeht. Diese beträgt

$$t_3 - t_2^* = t_3 - t_2 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \right) - \frac{1}{2} t_1 \frac{v_1^2}{c^2}.$$

Sie überwiegt deutlich das Nachgehen der Uhren in S während der Phasen 1 und 2.

Nun wird der wahre Grund dafür deutlich, dass $t'_3 < t_3$ ist: Das Zurückdrehen der X' -Achse in Phase 3 erfolgt in größerer Entfernung von der W -Achse als das Drehen während Phase 1. Sie überstreicht dabei in Phase 3 eine der Entfernung von der W -Achse proportionale Strecke dieser Achse. Anders gesagt: Die Ursache für das Nachgehen der Uhren in S' nach der Rückkehr des Zwillings beruht darauf, dass die Bremsphase 3 (und die darauf folgende Beschleunigungsphase beim Rückflug) sich in größerer Entfernung abspielen als die erste Beschleunigung (Phase 1) und die Bremsphase vor Ende der Reise.

Home: <http://home.vrweb.de/~si.pe>